

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана  
Факультет "Фундаментальные науки"  
Кафедра "Высшая математика"

Аналитическая геометрия  
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра  
Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.



# Системы линейных алгебраических уравнений



# Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение*

Системой из  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида



### Определение

Системой из  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

[illegible]



# Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение (продолжение)*

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) -  
это **коэффициенты** системы,



# Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение (продолжение)*

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) -  
это **коэффициенты** системы,  
числа  $b_1, \dots, b_m$  – **свободные члены**,



# Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение (продолжение)*

где числа  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ) - это **коэффициенты** системы,  
числа  $b_1, \dots, b_m$  - **свободные члены**,  
 $x_1, \dots, x_n$  - **неизвестные**, которые надо определить.



Запись СЛАУ в виде (1) называется  
**координатной.**





# Системы линейных алгебраических уравнений

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B, \quad (2)$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{— матрица системы,}$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad - \text{столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad - \text{столбец свободных членов.}$$



# Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение*

**Расширенной** матрицей системы (1) называется матрица  $\tilde{A}$  вида

$$\tilde{A} = \left( \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_A \middle| \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{matrix}}_B \right) .$$



## Определение

Система (1) называется **однородной**, если  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , в противном случае она называется **неоднородной**.



# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

**Решением** СЛАУ называется такой набор значений неизвестных  $x_1^{(\circ)}, x_2^{(\circ)}, \dots, x_n^{(\circ)}$ , который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.



## *Определение*

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.





# Системы линейных алгебраических уравнений

## *Определение*

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.



## *Определение*

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.



## Определение

Пусть ранг матрицы совместной системы равен  $r$ . Неизвестные  $x_1, x_2, \dots, x_r$  называются **базисными**, если коэффициенты при них образуют базисный минор матрицы системы. Остальные  $n - r$  неизвестные называются **свободными**.



# Критерий совместности СЛАУ



## *Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)*



# Критерий совместности СЛАУ

## *Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)*

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы  $A$  был равен рангу ее расширенной матрицы  $\tilde{A}$ .



# Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие утверждения:



# Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие утверждения:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.





# Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие утверждения:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.
2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.



# Матричный метод решения СЛАУ



# Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными в матричной форме

$$AX = B. \quad (3)$$



# Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными в матричной форме

$$AX = B. \quad (3)$$

Здесь матрица  $A$  квадратная.



# Матричный метод решения СЛАУ

## *Теорема (о существовании решения)*



# Матричный метод решения СЛАУ

*Теорема (о существовании решения)*

Система (3) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы  $\det A \neq 0$ .



# Матричный метод решения СЛАУ

*Теорема (о существовании решения)*

Система (3) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы  $\det A \neq 0$ .

*Определение*

Если  $\det A \neq 0$ , то система (3) называется **невырожденной**.



# Матричный метод решения СЛАУ

Пусть  $\det A \neq 0$ .





# Матричный метод решения СЛАУ

Пусть  $\det A \neq 0$ . Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу  $A^{-1}$ , получим:



# Матричный метод решения СЛАУ

Пусть  $\det A \neq 0$ . Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу  $A^{-1}$ , получим:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (4)$$



# Матричный метод решения СЛАУ

Пусть  $\det A \neq 0$ . Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу  $A^{-1}$ , получим:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (4)$$

Отыскание решения системы (3) по формуле (4) называется **матричным методом решения системы**.



# Метод Крамера



# Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):



Рассмотрим равенство (4):

$$X = A^{-1} \cdot B =$$



# Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \cdot B =$$



# Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \cdot B = \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$





# Метод Крамера

По теореме разложения определителя  $k$ -ый элемент получившегося вектора есть разложение определителя, полученного из определителя матрицы  $A$  заменой  $k$ -ого столбца столбцом свободных членов  $B$ .



# Метод Крамера

Тогда получим формулы для вычисления решений системы (3):



# Метод Крамера

Тогда получим формулы для вычисления решений системы (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (5)$$



# Метод Крамера

Тогда получим формулы для вычисления решений системы (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (5)$$

где

$$\Delta = \det A,$$



# Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$



# Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$



# Метод Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

...



# Метод Крамера

Формулы (5) называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных систем по формулам (5) – **методом Крамера**.





# Метод Гаусса



# Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:



# Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.



# Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.



# Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.



# Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Последовательно, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, находятся все неизвестные.



# Метод Гаусса

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$



*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$





# Метод Гаусса

*Прямой ход*



## *Прямой ход*

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:



## *Прямой ход*

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right)$$



## Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array} \right)$$

(1) первую строку умножили на  $(-2)$  и добавили ко второй,



## Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned}\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right) &\stackrel{(1)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{\sim} \\ &\stackrel{(2)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right)\end{aligned}$$

(2) вторую строку разделили на 3.



2. Находим ранги матрицы системы  $A$  и расширенной матрицы системы  $\tilde{A}$  по эквивалентным им ступенчатым матрицам,



2. Находим ранги матрицы системы  $A$  и расширенной матрицы системы  $\tilde{A}$  по эквивалентным им ступенчатым матрицам, причем ступенчатая матрица для  $A$  получается путем удаления из ступенчатой матрицы для  $\tilde{A}$  последнего столбца.



Получаем, что  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$ .





# Метод Гаусса

Получаем, что  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$ . По теореме Кронекера-Капелли система совместна.



# Метод Гаусса

Получаем, что  $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$ . По теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Поскольку количество неизвестных  $n = 3$  больше ранга матрицы  $r(A)$ , то система имеет бесконечно много решений.



3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице  $A$ .



3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице  $A$ .

Поскольку в нашем случае  $r(A) = 2$ , то он имеет второй порядок.



# Метод Гаусса

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице  $A$ .

Поскольку в нашем случае  $r(A) = 2$ , то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



# Метод Гаусса

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице  $A$ .

Поскольку в нашем случае  $r(A) = 2$ , то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$



3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице  $A$ .

Поскольку в нашем случае  $r(A) = 2$ , то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы.



4. Определяем базисные неизвестные.





4. Определяем базисные неизвестные.  
Поскольку мы включили в определитель первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут  $x_1$  и  $x_2$ .



4. Определяем базисные неизвестные.

Поскольку мы включили в определитель первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут  $x_1$  и  $x_2$ . Оставшаяся неизвестная  $x_3$  будет свободной.



5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$



6. Положим, что свободная неизвестная  $x_3 = c$ , где  $c$  - произвольная постоянная.



6. Положим, что свободная неизвестная  $x_3 = c$ , где  $c$  - произвольная постоянная.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ x_2 = -8 - c. \end{cases}$$



# Метод Гаусса

Введение произвольной постоянной  $c$  обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ .



# Метод Гаусса

Введение произвольной постоянной  $c$  обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ . Свободная неизвестная  $x_3$  может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.



## *Обратный ход*





## *Обратный ход*

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

$$x_1 = 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c.$$



8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$



8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы,



8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной  $c$  конкретных значений.



# Метод Гаусса

Например, положив  $c = 0$ , получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

